Cálculo II – 2020/2021

Aula 28
1/1

Planificação **Aula 28** (presencial e E@D)

TP4D-1: 5ª feira, 24/06, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 24/06, 16h ; TP4D-3 e TP4D-5 (E@D): 6ª feira, 25/06, 14h ; TP4D-4: 4ª feira, 23/06, 10h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 101 a 104 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 15 e 20 **Resolução de PVIs usando Transformadas de Laplace**

Considere-se, por exemplo, o seguinte PVI linear de 2.ª ordem

$$\begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) \rightsquigarrow \text{EDO linear de coef. constantes} \\ \left.\begin{array}{l} y(0) = \beta_0 \\ y'(0) = \beta_1 \end{array}\right\} \text{condições iniciais} \end{cases}$$

Procedimento para resolver este PVI usando Transformadas de Laplace

Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$

1.º Passo: Aplicar a T.L. a ambos os membros da EDO.

2.º Passo: Substituir as condições iniciais e resolver a eq. em ordem a $Y(s)$.

3.º Passo: Calcular a T.L. Inversa: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Exercício 1: Resolver os seguintes PVIs usando T.L.

a) $\begin{cases} y'' + 9y = 20e^{-t} \\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' - 3y' = \text{sen}\,t \\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3t} \\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7y' + 4y = 8t^2 \\ y(0) = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y'' - y' = 2e^{t}\cos t \\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 0 \end{cases}$

TPCs: Folha prática 5: 4, 8, 9, 10 (9 → difícil)
2.º teste, 19/06/2019 → Ex. 3a)
Ex. Recurso, 08/07/2019 → Ex. 6
2.º teste, 13/06/2018 → Ex. 5b)
Ex. Recurso, 02/07/2018 → Ex. 7
2.º teste, 22/06/2017 → Ex. 2

Aula 28

1) a) $\begin{cases} \boxed{y'' + 9y = 20e^{-t}} & \text{EDO} \\ \boxed{y(0)=0;\ y'(0)=1} & \text{condições iniciais} \end{cases}$

1º Passo: Aplicar a T.L. a ambos os membros da EDO

$$\mathcal{L}\{y''+9y\}(s) = \mathcal{L}\{20e^{-t}\}(s)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{s^2 y(s) - s\overbrace{y(0)}^{=0} - \overbrace{y'(0)}^{=1}}_{\mathcal{L}\{y''\}(s)} + 9\underbrace{y(s)}_{\mathcal{L}\{y\}(s)} = 20 \times \frac{1}{s+1},\ s>-1$$

2º Passo: Substituir as condições iniciais e resolver a eq. em ordem a $y(s)$

$$\Leftrightarrow s^2 y(s) - 1 + 9y(s) = \frac{20}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow (s^2+9)\,y(s) = \frac{20}{s+1} + \frac{1}{1}_{\times(s+1)}$$

$$\Leftrightarrow (s^2+9)\,y(s) = \frac{21+s}{(s+1)(s^2+9)}$$

3º Passo: Calcular a T.L. inversa: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{21+s}{(s+1)(s^2+9)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1} + \frac{-2s+3}{s^2+9}\right\}$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$= 2e^{-t} - 2\cos(3t) + \operatorname{sen}(3t),\ t \geq 0$$

C. aux. $\dfrac{21+s}{(s+1)(s^2+9)} = \underset{\times(s^2+9)}{\dfrac{A}{s+1}} + \underset{\times(s+1)}{\dfrac{Bs+C}{s^2+9}},\ A,B,C \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 21+s = A(s^2+9) + (Bs+C)\times(s+1)$$

$$\Leftrightarrow 21+s = As^2+9A+Bs^2+Bs+Cs+C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=1 \\ 9A+C=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ -A+C=1 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ C=1+A \\ 9A+1+A=21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ 10A=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-2 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} y'' - 3y' = \operatorname{sen} t \\ y(0)=0;\ y'(0)=0 \end{cases}$

1º) $\mathcal{L}\{y'' - 3y'\}(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}$

$\Leftrightarrow s^2 y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} - 3(s y(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}) = \frac{1}{s^2+1}, \ s>0$

2º) $\Leftrightarrow (s^2-3s)\, y(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$\Leftrightarrow y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2-3s)}$

3º) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2-3s)}\right\}$

C. aux. $\frac{1}{(s^2+1)\underbrace{(s^2-3s)}_{s(s-3)}} = \underbrace{\frac{As+B}{s^2+1}}_{\times s(s-3)} + \underbrace{\frac{C}{s}}_{\times (s^2+1)(s-3)} + \underbrace{\frac{D}{s-3}}_{\times s(s^2+1)}$ ... T.P.C. $\begin{cases} A = 3/10 \\ B = -1/10 \\ C = -1/3 \\ D = 1/30 \end{cases}$

$= \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$

$- \frac{1}{3}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{=1} + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$

$= \frac{3}{10}\cos t - \frac{1}{10}\operatorname{sen} t - \frac{1}{3} + \frac{1}{30}e^{3t}, \ t \geq 0$

c) $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3t} \\ y(0)=0;\ y'(0)=1 \end{cases}$

1º) $\mathcal{L}\{y'' + 6y' + 9y\}(s) = \mathcal{L}\{4e^{-3t}\}(s)$

$\Leftrightarrow s^2 y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=1} + 6(s y(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}) + 9y(s) = 4 \times \frac{1}{s+3}, \ s>-3$

2º) $\Leftrightarrow \underbrace{(s^2+6s+9)}_{(s+3)^2}\, y(s) = \frac{4}{s+3} + 1 \Leftrightarrow y(s) = \frac{4}{(s+3)^3} + \frac{1}{(s+3)^2}$

3º) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+3)^3} + \frac{1}{(s+3)^2}\right\}$

$= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\}$ Prop. 1, $\lambda = -3$

$= \frac{4}{2} \times e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 \times 2}{s^3}\right\} + e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$

$= 2e^{-3t} \times t^2 + e^{-3t} \times t, \ t \geq 0$

$= e^{-3t} \times t(2t+1), \ t \geq 0$

d) $\begin{cases} 7y' + 4y = 8t^2 \\ y(0) = 8 \end{cases}$

1°) $\mathcal{L}(7y' + 4y)(s) = \mathcal{L}(8t^2)(s)$

$\Leftrightarrow 7(s\,y(s) - \overbrace{y(0)}^{=8}) + 4y(s) = \frac{16}{s^3}$

2°) $7s\,y(s) - 56 + 4y(s) = \frac{16}{s^3}$

$\Leftrightarrow (7s+4)\,y(s) = \frac{16}{s^3} + \frac{56}{1 \times s^3}$

$\Leftrightarrow (7s+4)\,y(s) = \frac{16 + 56s^3}{s^3}$

$\Leftrightarrow y(s) = \frac{16 + 56s^3}{s^3(7s+4)}$

3°) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{16 + 56s^3}{s^3(7s+4)}\right\}$

$= \frac{49}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{4}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 \times 2}{s^3}\right\} - \underbrace{\frac{119}{4} \times \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{7s+4}\right\}}_{\underbrace{\frac{119}{4} \times \frac{1}{7}}_{\frac{17}{4}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{4}{7}}\right\}} \rightarrow \frac{1}{7(s+\frac{4}{7})}$

$= \frac{49}{4} - 7t + 2t^2 - \frac{17}{4}e^{-\frac{4}{7}t}, \quad t \geq 0$

C. aux

$\frac{16 + 56s^3}{s^3(7s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{7s+4}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

$\times s^2(7s+4) \quad \times s(7s+4) \quad \times (7s+4) \quad \times s^3$

$\Leftrightarrow 16 + 56s^3 = A(7s^3 + 4s^2) + B(7s^2 + 4s) + C(7s+4) + Ds^3$

$\Leftrightarrow 16 + 56s^3 = 7As^3 + 4As^2 + 7Bs^2 + 4Bs + 7Cs + 4C + Ds^3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7A + D = 56 \\ 4A + 7B = 0 \\ 4B + 7C = 0 \\ 4C = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -\frac{119}{4} \\ A = \frac{49}{4} \\ B = -7 \\ C = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y'' - y' = 2e^t \cos t \\ y(0) = 0 \, ; \; y'(0) = 0 \end{cases}$

C. aux

$$2\mathcal{L}\{e^t \underbrace{\cos t}_{f(s)}\}(s) = 2F(s-1) = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}, \; s > 0+1$$

$\lambda = 1$; Prop. 1 ; $s > 1$

C. aux $F(s) = \mathcal{L}\{\cos t\}(s)$

$$= \frac{s}{s^2+1}, \; s > 0$$

1°) $\mathcal{L}\{y'' - y'\}(s) = \mathcal{L}\{2e^t \cos t\}(s)$

2°) $\Leftrightarrow s^2 y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} - (s\,y(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}) = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{(s^2 - s)}}_{s(s-1)} y(s) = \frac{2\cancel{(s-1)}}{(s-1)^2+1} \Leftrightarrow y(s) = \frac{2}{s((s-1)^2+1)}$

3°) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s((s-1)^2+1)}\right\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1+1)((s-1)^2+1)}\right\} = e^t \times \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

Prop 1 $\lambda = 1$

Ex. 4b aula 27

$= \cancel{2} e^t \times \frac{1}{\cancel{2}}(-\cos t + \operatorname{sen} t + e^{-t}), \; t \geq 0$

$= e^t(-\cos t + \operatorname{sen} t) + 1, \; t \geq 0$